Eine strenge Behandlung der Beugung elektromagnetischer Wellen am Streifengitter

Von R. Müller *

(Z. Naturforschg. 8a, 56—60 [1953]; eingegangen am 21. November 1952)

Das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen am Streifengitter wird in voller Allgemeinheit, d. h. bei beliebigem Verhältnis der Wellenlänge λ der einfallenden Welle zur Gitterkonstanten a, beliebigem Verhältnis α der Streifenbreite zur Gitterkonstanten, beliebigem Einfallswinkel φ und beliebigem Polarisationszustand der einfallenden Welle, zurückgeführt auf zwei Fredholmsche Integralgleichungen erster Art. Die Integralgleichungen beschreiben die zwei ausgezeichneten Polarisationsfälle: elektrischer Vektor parallel zur Streifenrichtung und magnetischer Vektor parallel zur Streifenrichtung. Die beiden Integralgleichungen gehen ineinander über, wenn man die Polarisationsfälle vertauscht und das Gitter durch ein komplementäres Gitter ersetzt. In dieser Symmetrie der Integralgleichungen drückt sich das Babinetsche Prinzip der Optik aus. Die Integralgleichungen sind von der gleichen Struktur wie die Integralgleichungen, die die Beugung von Rohrwellen in rechteckigen Rohren an ebenen Schlitzblenden beschreiben. Für diese Integralgleichungen wurde an anderer Stelle ein Lösungsverfahren angegeben, das für die hier aufgestellten Integralgleichungen etwa bis $a/\lambda \leq 4$ brauchbar ist. Das Verhältnis von Streifenbreite zu Gitterkonstante kann dabei beliebig sein.

I. Unter einem Streifengitter verstehen wir eine Anordnung von geraden parallelen Streifen, die mit gleichem Abstand voneinander in einer Ebene liegen, ideal leitend und unendlich dünn sind. Die Gitterkonstante sei a, die Streifenbreite αa. Der Parameter α kann alle Werte zwischen Null und Eins annehmen. Die Schlitzbreite im Gitter kennzeichnen wir durch den Parameter $\beta = 1 - \alpha$. Die Wellenzahl der einfallenden Welle sei k. Den für die Beugung am Gitter charakteristischen Parameter $a/\lambda = ka/2\pi$ bezeichnen wir mit $\varkappa$. λ ist die Wellenlänge der einfallenden Welle. Der Parameter $\varkappa$ kann beliebige positive Werte annehmen.

Wir legen den folgenden Betrachtungen ein cartesisches Koordinatensystem xyz zugrunde. Das Gitter liege so in der xy-Ebene, daß die Streifen parallel zur y-Achse orientiert sind. Der Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ der einfallenden ebenen Welle, deren Polarisationszustand beliebig sein kann, liege in der xz-Ebene[1]. Der Einfallswinkel φ, den der Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}$ mit der positiven z-Richtung einschließt, ist beliebig.

Das Problem der Beugung an einem unendlich ausgedehnten Streifengitter steht in enger Beziehung zu dem Problem der Beugung von Rohrwellen an einer ebenen Schlitzblende im rechteckigen Wellenleiter. In einer früheren Arbeit[2] wurde eine strenge Formulierung des Problems der Beugung von Rohrwellen an ebenen Blenden angegeben, die sich ohne Schwierigkeit auf die Beugung an unendlich ausgedehnten Beugungsobjekten übertragen läßt. Wir werden uns daher im folgenden häufig auf die genannte Arbeit beziehen.

II. Ein mit der Kreisfrequenz ω zeitlich periodisches elektromagnetisches Feld läßt sich durch zwei skalare Felder, die sogenannten Potentiale e und h in folgender Weise ausdrücken:

$$\sqrt{\Delta}\,\mathfrak{E} = e^{-i\omega t}\Big(\mathrm{grad}\,\frac{\partial}{\partial z}\,e + k\,[\mathrm{grad}\,h\cdot\mathfrak{z}] - \mathfrak{z}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,e\Big),$$

$$i\sqrt{\Pi}\,\mathfrak{H} = e^{-i\omega t}\Big(\mathrm{grad}\,\frac{\partial}{\partial z}\,h + k\,[\mathrm{grad}\,e\cdot\mathfrak{z}] - \mathfrak{z}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,h\Big). \qquad (1)$$

$\mathfrak{z}$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung. Δ und Π sind Materialkonstanten, $k = \omega\sqrt{\Pi\Delta}$ die Wellenzahl, i die imaginäre Einheit. Die Potentiale e und h genügen der Wellengleichung:

$$\triangle e + k^2 e = 0\,, \qquad \triangle h + k^2 h = 0\,. \qquad (2)$$

* München 13, Adelheidstraße 10.

[1] Es macht keine Schwierigkeit, den allgemeineren Fall $(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{y}) \neq 0$ zu behandeln. Das Beugungsproblem führt dann nicht wie in dem hier behandelten Fall auf zwei getrennte Integralgleichungen für die zwei charakteristischen Polarisationszustände, sondern auf zwei gekoppelte Integralgleichungen, wie dies an anderer Stelle für die Beugung der H_{01}-Welle an einer Schlitzblende im rechteckigen Wellenleiter diskutiert wurde.

[2] R. Müller, Z. Naturforschg. 5a, 617 [1950].

3. Auswertung der unendlichen Reihe $S(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Cos}^{-2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\varkappa$, $\varkappa = K'(k)/K(k)$, $\varkappa' = \varkappa^{-1}$.

Die Zerlegung $S(k^2) = \dfrac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\frac{\pi\varkappa}{2}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\left(\frac{\pi}{2}\varkappa + n\pi\varkappa\right)}$

erlaubt die Anwendung der Poissonschen Summenformel

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} f(x+h\,l) = \frac{1}{l}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \exp\left(\frac{2\pi i h x}{l}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\exp\left(-\frac{2\pi i h x'}{l}\right) dx'.$$

Wir setzen hierin

$$f(x) = \frac{\sin a}{\mathfrak{Cos}\,x + \cos a}, \quad x = \pi\varkappa, \quad l = 2\pi\varkappa.$$

Dann wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\exp\left(-\frac{2\pi i h x'}{l}\right) dx' = 2\pi\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi h a}{l}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi^2 h}{l}},$$

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} f(x+h\,l) = \frac{2\pi}{l}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \exp(i\pi h)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,(2\pi h a/l)}{\mathfrak{Sin}\,(2\pi^2 h/l)}$$

$$= \frac{2\varkappa'}{i}\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h\,\frac{\sin i a h\varkappa'}{\mathfrak{Sin}\,\pi h\varkappa'} + \varkappa'\,\frac{a}{\pi} = \frac{2K}{i\pi}\,\mathrm{zn}\left(K' + \frac{i a}{\pi}K, k'\right) + \varkappa'\,\frac{a}{\pi}$$

(siehe Oberhettinger-Magnus, Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949, S. 25.)

Die ursprüngliche Summe läßt sich darstellen als

$$S(k^2) = \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\frac{\pi}{2}\varkappa} + \lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} f(x+h\,l).$$

$$= \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\frac{\pi}{2}\varkappa} + \frac{1}{\pi}\varkappa' + 2\left(k^2 - \frac{E'}{K'}\right)\left(\frac{K}{\pi}\right)^2.$$

Näherung für kleine k^2 : $S(k^2) \approx 3k^2/8$

Näherung für kleine k'^2: $S(k^2) \approx \dfrac{2}{\pi^2}\ln\dfrac{4}{k'}k' + \dfrac{1}{2}$.

Die letztgenannte Formel ist nur für sehr kleine k' brauchbar, da das erste vernachlässigte Glied

$\left(1/\ln\frac{4}{k'}\right)^2 (1/2\pi)^4/2$ ist.

Wir zerlegen nun das gesamte Wellenfeld, das durch die Beugung einer einfallenden Welle beliebiger Polarisationsrichtung am Gitter hervorgerufen wird, in das Feld der einfallenden Welle und ein symmetrisch von dem Gitter ausgehendes Beugungsfeld. Das Feld der einfallenden Welle beschreiben wir durch die Potentiale $\vec{e}$, $\vec{h}$, das Beugungsfeld durch die Potentiale $\overleftrightarrow{e}$, $\overleftrightarrow{h}$. Es ist dann:

$$\vec{e} = \frac{A}{ik^2 \sin\varphi}\, e^{ik(x\sin\varphi + z\cos\varphi)},$$

$$\vec{h} = \frac{-B}{ik^2 \sin\varphi}\, e^{ik(x\sin\varphi + z\cos\varphi)}. \tag{3}$$

Für $\varphi = 0$, d. h. bei senkrechter Inzidenz gehen die Potentiale $\vec{e}$, $\vec{h}$ bis auf einen belanglosen, von x unabhängigen Anteil über in:

$$\vec{e} = \frac{A}{k}\, x\, e^{ikz}, \qquad \vec{h} = -\frac{B}{k}\, x\, e^{ikz}. \tag{4}$$

Wie aus Gl. (1) hervorgeht, beschreibt e eine ebene Welle, die bzgl. des magnetischen Feldes parallel zur Streifenrichtung polarisiert ist. Wir bezeichnen Wellen mit solchem Polarisationszustand im folgenden als e-Wellen. Das Potential h beschreibt eine ebene Welle, die bzgl. des elektrischen Feldes parallel zur Streifenrichtung polarisiert ist (h-Welle). A bzw. B sind die Amplituden der einfallenden ebenen Welle bezogen auf die zur Streifenrichtung (y-Richtung) parallelen „reduzierten" Feldkomponenten $-i\sqrt{\Pi}\mathfrak{H}$ bzw. $\sqrt{\Delta}\mathfrak{E}$.

Wegen der Symmetrie des Problems ist das gesamte Wellenfeld unabhängig von der Koordinate y. Aus der Symmetrie des Gitters folgt weiter, daß das gesamte Feld bis auf eine Phasenverschiebung, die von der Einfallsrichtung der erregenden Welle abhängt, in sich übergeht, wenn man die Translation $x \to x + a$ ausführt. Wir können daher für die Potentiale $\overleftrightarrow{e}$ und $\overleftrightarrow{h}$ den Ansatz machen:

$$\overleftrightarrow{e} = \frac{e^{ikx\sin\varphi}}{k} \begin{cases} \dfrac{a_0}{ik\sin\varphi}\, e^{i\gamma_0 z} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}' a_\nu\, e^{i\nu\frac{2\pi x}{a}}\, e^{i\gamma_\nu z} & \text{für } z > 0, \\ \dfrac{-a_0}{ik\sin\varphi}\, e^{-i\gamma_0 z} - \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}' a_\nu\, e^{i\nu\frac{2\pi x}{a}}\, e^{-i\gamma_\nu z} & \text{für } z < 0, \end{cases} \tag{5a}$$

$$\overleftrightarrow{h} = \frac{e^{ikx\sin\varphi}}{k} \begin{cases} \dfrac{-b_0}{ik\sin\varphi}\, e^{i\gamma_0 z} - \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}' b_\nu\, e^{i\nu\frac{2\pi x}{a}}\, e^{i\gamma_\nu z} & \text{für } z \geq 0, \\ \dfrac{-b_0}{ik\sin\varphi}\, e^{-i\gamma_0 z} - \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}' b_\nu\, e^{i\nu\frac{2\pi x}{a}}\, e^{i\gamma_\nu z} & \text{für } z \leq 0. \end{cases} \tag{5b}$$

Für $\varphi = 0$, d. h. bei senkrechter Inzidenz haben wir genau wie oben bei den Potentialen der einfallenden Welle $a_0/ik \sin\varphi$ bzw. $b_0/ik \sin\varphi$ durch $a_0 x$ bzw. $b_0 x$ zu ersetzen. Der Strich am Summenzeichen deutet an, daß nur über $\nu \neq 0$ zu summieren ist.

Die Antisymmetrie von $\overleftrightarrow{e}$ bzw. die Symmetrie von $\overleftrightarrow{h}$ bzgl. der Koordinate z folgt, wie in (1) näher ausgeführt ist, aus der Forderung der Stetigkeit des elektrischen Transversalfeldes bzgl. der Koordinate z. Die Ausbreitungskonstanten γ_ν sind durch die Forderung bestimmt, daß die Potentiale $\overleftrightarrow{e}$ und $\overleftrightarrow{h}$ der Wellengleichung, s. Gl. (2), genügen müssen. Man erhält, wie man leicht verifiziert:

$$\gamma_\nu = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\varkappa^2\cos^2\varphi - 2\varkappa\nu\sin\varphi - \nu^2} \qquad \text{für } \varkappa \equiv \frac{ka}{2\pi} > \frac{|\nu|}{1 - \operatorname{sign}(\nu)\sin\varphi},$$

$$\gamma_\nu = i\,\frac{2\pi}{a}\sqrt{\nu^2 + 2\varkappa\nu\sin\varphi - \varkappa^2\cos^2\varphi} \qquad \text{für } \varkappa < \frac{|\nu|}{1 - \operatorname{sign}(\nu)\sin\varphi}. \tag{6}$$

Wie aus den Gln. (6) hervorgeht, genügt es, die Grenzwerte der Potentiale $\overleftrightarrow{e}$ und $\overleftrightarrow{h}$ für $z \to +0$ zu bestimmen, da durch die Fourier-Koeffizienten dieser Funktionen das gesamte Beugungsfeld bestimmt ist. Wir bezeichnen diese Grenzwerte mit e, h und die Grenzwerte der Ableitung der Potentiale $\overleftrightarrow{e}$. $\overleftrightarrow{h}$ nach z für $z \to +0$ mit $\tilde{e}$, $\tilde{h}$. Wie in [2] näher ausgeführt ist, müssen die Funktionen $e(x)$, $h(x)$ stetig sein und stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen, die Funktionen $\tilde{e}(x)$, $\tilde{h}(x)$ stetig sein. Aus der Forderung, daß das elektrische Transversalfeld auf den Gitterstegen verschwindet, folgt, wie aus Gl. (1) hervorgeht, wenn wir die Ableitung des Potentials $\overleftrightarrow{e}$ der einfallenden Welle nach z für $z=0$ mit $\tilde{e}_0$, das Potential $\overleftrightarrow{h}$ der einfallenden Welle für $z=0$ mit h_0 bezeichnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tilde{e}+\tilde{e}_0)=0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h+h_0)=0 \tag{7}$$

auf den Gitterstegen.

Aus der Forderung der Stetigkeit des magnetischen Transversalfeldes in den Gitteröffnungen folgt weiter:

$$\mathrm{d}e/\mathrm{d}x=0,\ \mathrm{d}\tilde{h}/\mathrm{d}x=0 \tag{8}$$

in den Gitteröffnungen.

Die Gln. (7) und (8), zusammen mit den obigen Stetigkeitsbedingungen, reichen zur eindeutigen Bestimmung der Funktionen $e(x)$ und $h(x)$ aus. Der Beweis ist als Spezialfall in dem an anderer Stelle [3] durchgeführten Beweis für die Eindeutigkeit des analog formulierten Beugungsproblems von Rohrwellen an ebenen Schlitzblenden in rechteckigen Rohren enthalten, so daß wir hier auf seine Wiederholung verzichten können.

Wir führen nun an Stelle der Variablen x die neue Variable $x^*=2\pi x/a$ ein, die wir der einfachen Schreibweise wegen wieder mit x bezeichnen und setzen:

$$e=\frac{e^{i\varkappa x\sin\varphi}}{k}\,f(x)\,,\qquad \tilde{e}=\frac{e^{i\varkappa x\sin\varphi}}{k}\,\tilde{f}(x)\,. \tag{9}$$

Wie aus Gl. (5a) hervorgeht, ist dann:

$$f(x)=\frac{a_0}{ik\sin\varphi}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' a_\nu\, e^{i\nu x},$$
$$\tilde{f}(x)=\frac{a_0\gamma_0}{k\sin\varphi}+i\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu\gamma_\nu\, e^{i\nu x}. \tag{10}$$

Weiter setzen wir:

$$h=\frac{e^{i\varkappa x\sin\varphi}}{k}\,g(x)\,,\qquad \tilde{h}=\frac{e^{i\varkappa x\sin\varphi}}{k}\,\tilde{g}(x)\,. \tag{11}$$

Wie aus Gl. (5b) hervorgeht, ist dann:

$$g(x)=\frac{-b_0}{ik\sin\varphi}-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' b_\nu\, e^{i\nu x},$$
$$\tilde{g}(x)=\frac{-b_0\gamma_0}{k\sin\varphi}-i\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu\gamma_\nu\, e^{i\nu x}. \tag{12}$$

Mit diesen Bezeichnungen folgt aus den Gln. (7) und (8), wenn wir festsetzen, daß der Ursprung des Koordinatensystems, auf das wir die Funktionen e und $\tilde{e}$ beziehen, in der Mitte einer Gitteröffnung liegt, der Ursprung des Koordinatensystems, auf das wir die Funktionen h und $\tilde{h}$ beziehen, in der Mitte eines Gitterstreifens liegt:

$$\frac{2\pi}{a}\left(i\varkappa\tilde{f}\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}x}\right)+iA\gamma_0=0\ \text{ für } \beta\pi\le|x|\le\pi\,,$$
$$i\varkappa f\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0 \qquad \text{für } |x|\le\beta\pi\,. \tag{13}$$

und:

$$i\varkappa\tilde{g}\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}\tilde{g}}{\mathrm{d}x}=0 \qquad \text{für } \alpha\pi\le|x|\le\pi\,,$$
$$\frac{2\pi}{a}\left(i\varkappa g\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right)-B=0\ \text{ für } |x|\le\alpha\pi\,. \tag{14}$$

Wegen der Periodizität der Funktionen f und g konnten wir uns in den Gln. (13) und (14) auf eine Gitterperiode beschränken. Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$u=\frac{2\pi}{a}\left(i\varkappa f\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)+A,$$
$$\tilde{u}=\frac{2\pi}{a}\left(i\varkappa\tilde{f}\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}x}\right)+i\gamma_0A_0\,, \tag{15}$$

$$v=\frac{2\pi}{a}\left(i\varkappa g\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right),$$
$$\tilde{v}=\left(\frac{2\pi}{a}\,i\varkappa\tilde{g}\sin\varphi+\frac{\mathrm{d}\tilde{g}}{\mathrm{d}x}\right); \tag{16}$$

dann ist:

$$u=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu^*\, e^{i\nu x},$$
$$\tilde{u}=i\sum_{-\infty}^{+\infty}\gamma_\nu a_\nu^*\, e^{i\nu x}, \tag{17}$$
$$a_\nu^*=i\,\frac{2\pi}{a}(\varkappa\sin\varphi+\nu)\,a_\nu,\quad \nu\neq 0$$
$$a_0^*=a_0+A;$$

$$v=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu^*\, e^{i\nu x},$$
$$\tilde{v}=i\sum_{-\infty}^{+\infty}\gamma_\nu b_\nu^*\, e^{i\nu x}, \tag{18}$$
$$b_\nu^*=i\,\frac{2\pi}{a}(\varkappa\sin\varphi+\nu)\,b_\nu;$$
$$b_0^*=b_0\,.$$

[3] R. Müller, Z. angew. Physik **IV**, 423 [1952].

Die Entwicklungskoeffizienten a_ν^*, b_ν^* geben für $\nu \neq 0$ die komplexen Amplituden der Beugungswellen ν-ter Ordnung an, bezogen auf die zur Streifenrichtung (y-Richtung) parallelen „reduzierten" Feldkomponenten $-i\sqrt{\Pi}H_y$, $\sqrt{\Delta}E_y$. a_0^* ist die Amplitude der durch das Gitter in Einfallsrichtung hindurchtretenden $\vec{e}$-Welle, also $(|a_0^*/A|)^2$ die Durchlässigkeit des Gitters für die einfallende $\vec{e}$-Welle, b_0^* ist die Amplitude der am Gitter reflektierten $\vec{h}$-Welle, $(|b_0/B|)^2$ also das Reflexionsvermögen für diesen Polarisationsfall. Den durch die Gln. (17) und (18) gegebenen Sachverhalt kann man durch die Integralbeziehungen:

$$u = \int_{-\pi}^{+\pi} P(x-x')\,\tilde{u}(x')\,\mathrm{d}x' \tag{19a}$$

$$v = \int_{-\pi}^{+\pi} P(x-x')\,\tilde{v}(x')\,\mathrm{d}x' \tag{19b}$$

ausdrücken, wobei der Kern P die Gestalt

$$P(x-x') = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(x-x')}/i\gamma_\nu \tag{20}$$

hat. Beschränkt man in der Gl. (19a) den Variationsbereich von x und x' auf $|x| \leq \beta\pi$, $|x'| \leq \beta\pi$, in der Gl. (19b) den Variationsbereich auf $|x| \leq \alpha\pi$, $|x'| \leq \alpha\pi$, so erhält man daraus, unter Beachtung der Gln. (13) und (14) je eine Integralgleichung für $\tilde{u}$ bzw. $\tilde{v}$ allein:

$$A = \int_{-\beta\pi}^{+\beta\pi} P(x-x')\,\tilde{u}(x')\,\mathrm{d}x', \tag{21a}$$

$$B = \int_{-\alpha\pi}^{+\alpha\pi} P(x-x')\,v(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{21b}$$

Die Integralgleichungen Gln. (21a und b) gehen ineinander über, wenn man A mit B und $\tilde{u}$ mit $\tilde{v}$ vertauscht und das Gitter durch ein komplementäres Gitter ersetzt. Man hat also mit dem Beugungsproblem für einen der beiden Polarisationsfälle auch das Beugungsproblem für den anderen Polarisationsfall am komplementären Gitter gelöst. In dieser Symmetrie der Integralgleichungen (21a und b) drückt sich das Babinetsche Prinzip der Optik in der strengen, von Meixner[4] gegebenen Formulierung aus.

Die Belegfunktionen $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ haben eine einfache physikalische Bedeutung. Es ist, wie aus der Gl. (1) und den Definitionen von $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ in den Gln. (15) und (16) hervorgeht, $(1/k\sqrt{\Delta})e^{i\kappa x\sin\varphi}\tilde{u}(x)$ das elektrische Transversalfeld im Spalt bei einer einfallenden $\vec{e}$-Welle, $(2i/k\sqrt{\Pi})\,e^{i\kappa x\sin\varphi}\,\tilde{v}(x)$ die Stromdichtebelegung auf dem Streifen bei einer einfallenden $\vec{h}$-Welle.

Neben den Integralgleichungen (19a und b) lassen sich durch einfache Umformungen zwei andere äquivalente Integralgleichungen aufstellen, durch die für beide Polarisationsfälle Belegfunktionen auf den komplementären Gitterbereichen bestimmt werden. Wir legen im Gegensatz zu den oben getroffenen Festsetzungen den Ursprung des Koordinatensystems, auf das wir die Funktionen e und $\tilde{e}$ beziehen, in die Mitte eines Gittersteges, den Ursprung des Koordinatensystems, auf das wir die Funktionen h und $\tilde{h}$ beziehen, in die Mitte einer Gitteröffnung. Man erhält dann mit der gleichen Bezeichnung wie oben an Stelle der Gl. (13) und (14)

$$\tilde{u} = 0 \text{ für } |x| \leq \alpha\pi,\quad u - A = 0 \text{ für } \alpha\pi \leq |x| \leq \pi \tag{23}$$

und:

$$\tilde{v} = 0 \text{ für } |x| \leq \beta\pi,\quad v - B = 0 \text{ für } \beta\pi \leq |x| \leq \pi \tag{24}$$

und an Stelle der Gl. (17) und (18)

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu a_\nu^* e^{i\nu x},\quad \tilde{u} = i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu \gamma_\nu a_\nu^* e^{i\nu x}, \tag{25a}$$

$$v = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu b_\nu^* e^{i\nu x},\quad \tilde{v} = i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu \gamma_\nu b_\nu^* e^{i\nu x}. \tag{25b}$$

Wir bilden nun aus $\tilde{u}$ durch Integration eine Funktion s:

$$s = \int_0^x \tilde{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = i\gamma_0 a_0^*\,x + \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} \tag{26}$$

mit:

$$c_\nu = (-1)^\nu \frac{a_\nu^*\gamma_\nu}{\nu},\quad \nu \neq 0, \tag{27a}$$

$$c_0 = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^\nu \frac{a_\nu^*\gamma_\nu}{\nu}. \tag{27b}$$

Mit Gl. (26) folgt nun aus der ersten Gl. (23):

$$s(x) = 0 \text{ für } |x| \leq \alpha\pi. \tag{28}$$

Nach unseren obigen Voraussetzungen ist u eine stetige Funktion. Wir können daraus durch Differentiation nach x die integrable Funktion u' bilden. Aus der zweiten Gl. (23) folgt dann:

$$u' = 0 \text{ für } \alpha\pi \leq |x| \leq \pi \tag{29}$$

[4] J. Meixner, Z. Naturforschg. 1, 496 [1946].

und aus der ersten Gl. (25a):

$$u' = i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu \nu\, a_\nu^* \, e^{i \nu x}. \tag{30}$$

Damit folgt aber aus Gl. (26) und (27a) unter Beachtung der Gln. (28) und (29), wenn wir wieder wie oben den Variationsbereich von x und x' auf $|x| \leq \alpha\pi$, $|x'| \leq \alpha\pi$ beschränken, die Integralgleichung für u' allein:

$$c_0 + i\gamma_0 a_0^* x = \int_{-\alpha\pi}^{+\alpha\pi} Q(x-x')\, u'(x')\, \mathrm{d}x', \tag{31}$$

wobei der Kern Q die Gestalt:

$$Q(x-x') = \frac{i}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_\nu}{\nu^2}\, e^{i\nu(x-x')} \tag{32}$$

hat. Die Konstante c_0 können wir, wie aus den Gln. (27b), (30) und (32) folgt, auch in der Form

$$c_0 = \int_{-\alpha\pi}^{+\alpha\pi} Q(x)\, u'(x)\, \mathrm{d}x \tag{33}$$

schreiben, was auch aus der Gl. (31) folgt, wenn man dort $x = 0$ setzt. In ganz analoger Weise erhält man eine Integralgleichung für v':

$$c + i\gamma_0 b_0^* x = \int_{-\beta\pi}^{+\pi\beta} Q(x-x')\, v'(x')\, \mathrm{d}x' \tag{34}$$

mit:

$$c = \int_{-\beta\pi}^{+\beta\pi} Q(x) v'(x)\, \mathrm{d}x. \tag{35}$$

Auch hier drückt sich in der gleichen Weise wie oben das Babinetsche Prinzip der Optik aus.

In den Integralgleichungen (32) und (34) kommt die Amplitude der einfallenden Welle A bzw. B nicht mehr explizite vor. Man überzeugt sich jedoch leicht, daß auf Grund der oben geforderten Stetigkeitsbedingungen die Funktionen u und v identisch verschwinden, wenn die Amplituden A bzw. B Null gesetzt werden. Multipliziert man z. B. die Gl. (31) mit der zu u' konjugiert komplexen Funktion $\overline{u}'$ und integriert über eine Gitterperiode, so erhält man bei verschwindender Amplitude A wegen der Gln. (29, 30 und 32) und unter Beachtung der Stetigkeit der Funktion u:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_\nu^*|^2\, \gamma_\nu = 0, \tag{36}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Man kann in den Gln. (31) und (33) die Konstanten $i\gamma_0 a_0^*$ bzw. $i\gamma_0 b_0^*$ gleich Eins setzen. Damit ist über die Amplituden der einfallenden Welle verfügt. Sie ergeben sich, wie man leicht verifiziert, zu:

$$A = -\frac{i}{\gamma_0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha\pi}^{+\alpha\pi} x u'(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$B = -\frac{i}{\gamma_0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta\pi}^{+\beta\pi} x v'(x)\, \mathrm{d}x. \tag{37}$$

Die Belegfunktionen $u'(x)$ und $v'(x)$ hängen in einfacher Weise mit der Stromdichtebelegung auf den Gitterstegen bzw. dem elektrischen Transversalfeld im Spalt zusammen. Es ist $(2i/k\sqrt{\Delta})\, e^{i\varkappa x \sin\varphi} u(x)$ die Stromdichtebelegung auf den Gitterstreifen bei einer einfallenden $\vec{e}$-Welle und $(1/k\sqrt{\pi})\, e^{i\varkappa x \sin\varphi} v(x)$ das elektrische Transversalfeld im Spalt bei einer einfallenden $\vec{h}$-Welle.

Die Integralgleichungen Gln. (32) und (34) beschreiben ebenso wie die Gln. (19a) und (19b) vollständig das betrachtete Beugungsproblem. Sie sind von der gleichen Struktur wie die Integralgleichungen, die die Beugung von Rohrwellen an Schlitzblenden in rechteckigen Wellenleitern beschreiben. Für diese Integralgleichungen wurde an anderer Stelle [5] ein Näherungsverfahren angegeben, das für die hier abgeleiteten Integralgleichungen etwa bis $\varkappa \leq 4$ brauchbar ist, und zwar hat man für Gitter mit schmalen Stegen ($\alpha < 1/2$) die Integralgleichungen zu benutzen, durch die die Belegfunktionen auf den Gitterstegen bestimmt werden, für Gitter mit schmalen Schlitzen ($\beta \leq 1/2$) die äquivalenten auf die Schlitzbereiche bezüglichen Integralgleichungen. Man hat damit gerade für die Fälle, in denen die Kirchhoffsche Methode versagt, ein brauchbares Näherungsverfahren zur Behandlung der Beugung am Gitter. Mit der hier abgeleiteten strengen Integralgleichung läßt sich auch der Zusammenhang der Kirchhoffschen Näherung mit der strengen Theorie diskutieren, worauf an anderer Stelle näher eingegangen wird.

[5] R. Müller, Z. angew. Physik, im Druck.